Université Sultane Moulay Slimane

FPK

Thermodynamique 1
Filières SMI/A

Pr. Z. FAIZ

Plan du cours

Chapitre I: Outils mathématique.

Chapitre II: Généralités

Chapitre III: Notions de base (chaleur et travail)

Chapitre IV: Premier principe de la thermodynamique

Chapitre V: Second principe de la thermodynamique

Outils mathématiques pour la thermodynamique

I. Introduction

En thermodynamique, nous avons souvent affaire à des fonctions d'une ou de plusieurs variables pour décrire le comportement d'un système.

f(x): fonction à une seule variable x

g(x, y): fonction à deux variables x et y

$U(x_1, x_2, x_3,…x_n)$: fonction à n variables x, y, z…

II. Rappel sur les dérivées partielles
a) Fonction à une seule variable

- Soit une fonction f(x) à une seule variable:

f: IR→IR x→ f(x)

- Sa dérivée au point x_0 est notée $f'(x_0)$ telle que :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{df(x_0)}{dx}$$

- Sa différentielle $df(x_0)$ est: $df(x_0) = f'(x_0)dx$

- D'où la notation $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$

$df = f'(x).\, dx$

EXEMPLE 1

Calculer la dérivée et la différentielle de la fonction suivante:

$$f(x) = 4x^2 + 3x + 6$$

Solution:

La dérivée de f(x) est

$$\frac{df(x)}{dx} = 8x + 3$$

La différentielle de f(x) est

$$df(x) = (8x + 3)dx$$

b) Fonction à deux variables

Soit f(x,y) une fonction à 2 variables indépendantes (x et y**):**

$$f\ :\ IR^2 \rightarrow IR^2:\ (x,y) \rightarrow f(x,y)$$

Quand f(x,y) varie, il y a trois possibilités:

- x varie et y = Cte: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$
- y varie et x = Cte: $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$
- x et y varient en même temps $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$

b) Fonction à deux variables

Différentielle totale de f(x,y)**:**

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$

Dérivées partielles de f(x,y):

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ et $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$

dérivée partielle par rapport à x en gardant y constante

dérivée partielle par rapport à y en gardant x constante

Exemple 2

Calculer la différentielle de la fonction f(x,y) ci-dessous:

$$f(x,y)= 5xy + 8x^2y + 7x + y$$

Solution:

Les dérivées partielles de f(x,y) sont:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 5y + 16xy + 7$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 5x + 8x^2 + 1$$

La différentielle df de f(x,y) est :

$$df=(5y+16xy+7)dx + (5x+8x^2+1)dy$$

Thermodynamique : Ch I Pr. Z.FAIZ 9

c) Fonction à trois variables

Soit la fonction f(x, y, z) de 3 variables x, y et z:

Les dérivées partielles de f(x,y,z):

$\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)_{y,z}$ à y et z constantes

$\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right)_{x,z}$ à x et z constantes

$\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)_{x,y}$ à x et y constantes

La différentielle df de f est

$$df = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)_{x,y} dz$$

Thermodynamique : Ch I Pr. Z.FAIZ 10

Exemple 3

Calculer la différentielle de la fonction suivante:

$$f(x,y,z)=x^2z + 4xy + z^3$$

Solution:

Les dérivées partielles sont

$$\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)_{y,z} = \frac{\partial(x^2z + 4xy + z^3)}{\partial x} = \frac{\partial(x^2z)}{\partial x} + \frac{\partial(4xy)}{\partial x} + \frac{\partial z^3}{\partial x} = 2xz + 4y$$

$$\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right)_{x,z} = \frac{\partial(x^2z + 4xy + z^3)}{\partial y} = \frac{\partial(x^2z)}{\partial y} + \frac{\partial(4xy)}{\partial y} + \frac{\partial z^3}{\partial y} = 4x$$

$$\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)_{x,y} = \frac{\partial(x^2z + 4xy + z^3)}{\partial z} = \frac{\partial(x^2z)}{\partial z} + \frac{\partial(4xy)}{\partial z} + \frac{\partial z^3}{\partial z} = x^2 + 3z^2$$

La différentielle df de f est:

$$df = (2xz + 4y)dx + 4xdy + (x^2 + 3z^2)dz$$

III. Dérivées partielles secondes

Soit df la différentielle d’une fonction f (x,y) à deux variables:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$

Les dérivées partielles secondes sont:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

IV. Différentielle totale exacte (DTE)

Théorème de Schwartz: df est une différentielle totale exacte (DTE), si et seulement si les dérivées partielles secondes croisées sont égales:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)$$

Soit:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

IV. Différentielle totale exacte (DTE)

Remarque:
Soit ω une forme différentielle quelconque

ω est DTE	ω n'est pas DTE
$\omega = df$	$\omega = \delta f$
Théorème de Schwarz est vérifié	Théorème de Schwarz n'est pas vérifié
F est une fonction d'état	F n'est pas une fonction d'état
Δf ne dépend pas du chemin suivi	Δf dépend du chemin suivi

IV. Différentielle totale exacte (DTE)

Une fonction d'état est une **fonction des variables d'état** qui définissent **l'état d'équilibre d'un système thermodynamique**. Sa valeur est calculable à partir de **variables d'état** : par exemple la température, la pression, le volume, variables importantes en thermodynamique.

Une telle fonction possède donc la propriété de ne dépendre que de l'état d'équilibre dans lequel se trouve le système, quel que soit le chemin emprunté par le système pour arriver à cet état. En particulier, au cours d'une transformation entre deux états d'équilibre, ***la variation d'une fonction d'état ne dépend pas du chemin suivi par le système pendant la transformation, mais uniquement des états d'équilibre initial et final***.

Exemple 4

La forme différentielles suivantes est elle exacte?

$$\omega = yz^2dx+z(xz+1)dy+(2xyz+2z+y)dz$$

Solution:

Posons P(x;y; z) = yz^2, Q(x;y; z) = z(xz+1), R(x,y,z) = 2xyz+2z+y)

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial (yz^2)}{\partial y} = z^2 \qquad \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial (xz^2+z)}{\partial x} = z^2$$

$$\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial (2xyz+2z+y)}{\partial x} = 2yz \qquad \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial (yz^2)}{\partial z} = 2yz$$

$$\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial (2xyz+2z+y)}{\partial y} = 2xz+1 \qquad \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial (z(xz+1))}{\partial z} = 2xz+1$$

ω Est une DTE, $\exists$ une fonction f(x,y,z) telle que $\omega = df$

V Recherche de la fonction d'état(1)

Soit δU une forme différentielle telle que :

$$\delta U = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

Existe –il une fonction U(*x*, *y*) qui fasse en sorte que l'on ait :

$$M(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x} \quad et \quad N(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

Et que cette fonction peut s'écrire sous la forme d'une différentielle totale exacte :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

V Recherche de la fonction d'état(2)

Et alors *U*(*x*, *y*) est la solution cherchée.
Pour cela il faut démonter que :

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Soit encore

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$